Ableitung ohne Grenzwertbegriff

Die Steigung einer Parabel in einem Punkt

Die Steigung einer Parabel in einem Punkt wird zumeist identifiziert mit der – leichter zu definierenden bzw. zu bestimmenden – Steigung ihrer Tangente in diesem Punkt. Die Tangente ist nun die Gerade, die mit der Parabel in $P(x_0|f(x_0))$ einen Berührpunkt hat. Bildet man die Differenz aus quadratischer Funktion f und linearer Tangentenfunktion t, so ergibt sich

$f(x_0) – t(x_0) = 0$ besitzt eine doppelte Nullstelle in x_0.

$$f(x_0)-t(x_0)=x_0^2-m\,x_0-n=0 \quad \text{Lösungsformel:} \quad x_{1,2}=\frac{m}{2}\pm\sqrt{\frac{m^2}{4}+n}$$

Da die beiden Nullstellen in x_0 liegen, gilt $\frac{m}{2}=x_0 \Leftrightarrow m=2\,x_0$

Die Ableitungsfunktion der Elementarparabel ist also $f'(x) = 2x$. Ohne Grenzwertbegriff.

Verallgemeinerung des Verfahrens auf ganzrationale Funktionen 3. Grades

ObdA.: $f(x) = x^3$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x^3-mx-n &= (x-x_0)^2\cdot \mathit{Restpolynom}\\
&= (x^2-2x\,x_0+x_0^2)\cdot \mathit{Restpolynom}\\
&= (x^2-2x\,x_0+x_0^2)\cdot(x+\mathit{Zahl})\\
&= x^3-2x^2\,x_0+x\,x_0^2+\mathit{Zahl}\cdot x^2-2x\,x_0\cdot \mathit{Zahl}+x_0^2\cdot \mathit{Zahl}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x_0=\mathit{Zahl}$$

$$\Rightarrow x_0^2-2x_0\cdot \mathit{Zahl}=-m \Rightarrow m=3x_0^2$$

Die Zeile $2x_0 = \mathit{Zahl}$ ergibt sich daraus, dass die x^2-Terme in der Zeile darüber verschwinden müssen.

Die Ableitungsfunktion der elementaren ganzrationalen Funktion 3. Grades $f(x) = x^3$ ist also $f'(x) = 3x^2$. Ohne Grenzwertbegriff.

Verallgemeinerung des Verfahrens auf ganzrationale Funktionen n. Grades

ObdA.: $f(x) = x^n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x^n-mx-n &= (x-x_0)^2\cdot \mathit{Restpolynom}\\
&= (x^2-2x\,x_0+x_0^2)\cdot \mathit{Restpolynom}\\
&= (x^2-2x\,x_0+x_0^2)\cdot(x^{n-2}+a_1x^{n-3}+a_2x^{n-4}+\ldots+a_{n-3}\cdot x+a_{n-2})
\end{aligned}$$

Da die Terme mit x^{n-1} verschwinden müssen, muss gelten: $a_1=2\,x_0$

Da die Terme mit x^{n-2} verschwinden müssen, muss gelten: $a_2-2\,x_0a_1+x_0^2=0 \Leftrightarrow a_2=3\,x_0^2$

Da die Terme mit x^{n-3} verschwinden müssen, muss gelten: $a_3-2\,x_0a_2+a_1x_0^2=0 \Leftrightarrow a_3=4\,x_0^3$

In der letzten Summe verschwinden die Terme mit dem Faktor x nicht:

$$m=2\,x_0a_{n-2}-a_{n-3}x_0^2=2\,x_0(n-1)x_0^{n-2}-(n-2)x_0^{n-3}\cdot x_0^2=n\cdot x_0^{n-1}$$

Die Ableitungsfunktion der elementaren ganzrationalen Funktion 3. Grades $f(x) = x^n$ ist also $f'(x) = nx^{n-1}$. Ganz ohne Grenzwertbegriff.

Die Fortführung dieser Argumentationsweise über Summen- und Faktorregel auf nichtelementare ganzrationale Funktionen sei dem motivierten Leser überlassen. Das wollte ich immer schon einmal schreiben.

01.12.16, Raimund Fischer